Substituant les équations (12) dans (9) et (13) dans (10), nous avons

$$X(x) = 1 + \frac{1}{2} x \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{d\nu'}{\lambda'^2} \int_0^{\lambda'} \frac{dx'}{x + x'} [X(x) X(x') - Y(x) Y(x')], \tag{14}$$

$$Y(x) = e^{-\frac{\tau_1}{x}} + \frac{1}{2} x \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{d\nu'}{\lambda'^2} \int_0^{\lambda'} \frac{dx'}{x - x'} [Y(x) X(x') - X(x) Y(x')]. \tag{15}$$

Les équations (12) à (15) se réduisent aux équations données par J. I. F. King (3).

D'une manière similaire au cas traité par nous (1), les lois de la réflexion diffuse et de la transmission s'écrivent respectivement :

$$I_\nu(0, +\mu) = \frac{F_0}{4\lambda_0} \int_0^{\tau_1} p(x; \tau, \tau_1) e^{-\frac{\tau}{x_0}} \frac{d\tau}{x} = \frac{1}{4} \frac{F_0}{\mu\lambda\lambda_0} S(\mu\lambda, \mu_0\lambda_0), \tag{16}$$

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_1, -\mu) &= \frac{F_0}{2} \delta(\nu - \nu_0) \delta(\mu - \mu_0) e^{-\frac{\tau_1}{\mu\lambda}} + \frac{4\lambda_0}{F_0} \int_0^{\tau_1} p(x; \tau_1 - \tau, \tau_1) e^{-\frac{\tau}{x_0}} \frac{d\tau}{x} \\ &= \frac{F_0}{2} \delta(\nu - \nu_0) \delta(\mu - \mu_0) e^{-\frac{\tau_1}{\mu\lambda}} + \frac{1}{4} \frac{F_0}{\mu\lambda\lambda_0} T(\mu\lambda, \mu_0\lambda_0). \end{aligned} \tag{17}$$

Les solutions (16) et (17) sont l'extension des équations (3) du chapitre IX de R. T. (4) au cas de la diffusion non cohérente. Le calcul détaillé se trouvera dans un article ultérieur.

(*) Séance du 20 octobre 1958

(1) S. Ueno, *Comptes rendus*, **247**, 1958, p. .

(2) S. Ueno, *Ann. Ap.*, **21**, 1958, fasc. 1.

(3) J. I. F. King, *Ap. J.*, **121**, 1955, p. 711.

(4) S. Chandrasekhar, *Ap. J.*, **107**, 1948, p. 48; *Radiative Transfer*, Oxford University Press, London, 1950; ce livre est référé dans ma Note comme « R. T. ».

RELATIVITÉ. — *Une axiomatique relativiste pour la microphysique*. Note de M. **Jean-Marie Souriau**, présentée par M. Joseph Pérès.

Nous proposons une théorie relativiste variationnelle, à cinq dimensions, où l'hypothèse de stationnarité de Jordan-Thiry est remplacée par une condition topologique globale (univers « tubulaire »). On peut en déduire, par trois approximations de finesse croissante : 1° la théorie de la Relativité générale; 2° la théorie de Jordan-Thiry; 3° une théorie présentant les caractéristiques essentielles de la Mécanique quantique.

A. *Axiomes proposés* :

A_1. *L'univers est une variété* (1) U, *de dimension* 5, *homéomorphe au « tube »* $R^4 \times T$ (T *désignant le tore de dimension* 1);

A_2. *Un champ euclidien hyperbolique normal* g_{jk} *est défini sur* U.

A_3. *Chaque phénomène est un champ* (1) *défini sur* U, *et possède une* présence p, *qui est un scalaire, fonction invariante des variables de champ, de leurs dérivées premières et des* g_{jk}.

A_4. *L'intégrale* $\int_C \left[\sum_r p_r\right]$ vol, *où* C *désigne une chaîne arbitraire de dimension* 5, *les* p_r *les présences des phénomènes concomitants et* vol *l'élément de volume euclidien, est stationnaire.*

B. *Notion de charge.* — Nous appellerons *charge* d'un phénomène le tenseur symétrique E^{jk} défini par

$$\delta[p\ \mathrm{vol}] = \frac{1}{2}\, E^{jk}\delta g_{jk}\,\mathrm{vol},$$

δ désignant une variation des g_{jk} seuls ; on peut montrer (3), (4) que :

B_1. *La somme des charges des phénomènes concomitants est nulle en tout point de* U.

B_2. *La charge de chaque phénomène vérifie l'équation de conservation*

$$\nabla_j E^{jk} = 0.$$

C. *Cartes adaptées.* — Nous appellerons *cartes adaptées* les applications de R^5 sur U, possédant la période

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\pi \end{bmatrix};$$

l'axiome A_1 implique leur existence.

D. *Approximations diverses.* — Pour confronter la théorie avec l'expérience, nous ferons trois catégories d'approximations, suggérées par l'idée que l'Univers est, à notre échelle, un tube « fin ».

D_1. *On peut négliger complètement la variable* x^5 ; *on est ramené à la théorie de la Relativité générale, sous la forme variationnelle que nous lui avons donnée* (2), (4).

D_2. *La relation* $F(X + n\Omega) = F(X)$, *valable quel que soit l'entier* n *si* $F(X)$ *repère un champ quelconque dans une carte adaptée, peut être interpolée macroscopiquement en*

$$F(X + \lambda\Omega) = F(X) \qquad \text{quel que soit } \lambda \text{ réel};$$

le champ est alors stationnaire, *on retrouve essentiellement la théorie de Jordan-Thiry* (*en supposant* $g_{55} < 0$).

On sait qu'on peut interpréter cette théorie en introduisant une variété-quotient de dimension 4, repérée par les $x^\alpha [\alpha = 1, 2, 3, 4]$.

La *charge* d'un phénomène se décompose alors en trois tenseurs quadridimensionnels, que nous proposons d'appeler *charge gravifique, charge électrique* et *charge nucléaire.* On peut identifier les deux premiers au *tenseur impulsion-énergie* et au *vecteur densité de courant* ; le troisième est scalaire.

On montre qu'un *champ de connexions symétriques* se décompose, en première approximation, en trois champs (gravifique, électromagnétique et nucléaire), les deux premiers vérifiant les équations d'Einstein et de Maxwell (avec, pour ces dernières, invariance de jauge et interaction avec les courants). Ceci conduit à penser que, parmi les phénomènes physiques, l'un d'eux est un champ de connexions.

D_3. *Une linéarisation au voisinage des solutions stationnaires de type* D_2 *conduit à des équations linéaires dont les solutions* Q *ont nécessairement, dans une carte adaptée, la période* Ω.

Une décomposition en série de Fourier :

$$Q = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_n e^{inx^5} = \psi_0 + 2\,\mathcal{R}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e^{inx^5}\right)$$

introduit des *fonctions d'onde complexes* ψ_n, dépendant seulement des x^α; on montre qu'elles vérifient *séparément* des équations linéaires *complexes*, que nous appellerons *équations d'onde*; nous désignerons par *quantification* le procédé D_3 qui permet de les obtenir.

E. *Seconde invariance*. — Parmi les glissements ([1]) conservant les équations, figurent les transformations $x^5 \to x^5 + C$, qui induisent sur les fonctions d'onde les substitutions $\psi_n \to \psi_n e^{inc}$; ainsi s'explique l'invariance des solutions par le corps des complexes. D'autres familles de glissements conduisent probablement aux autres propriétés de *seconde invariance*, inexplicables par les glissements quadridimensionnels, qu'on rencontre fréquemment en Mécanique quantique.

F. *Exemple de quantification*. — Nous étudierons ultérieurement la quantification du champ de connexion (gravifique, électromagnétique et nucléaire), telle qu'elle résulte de D_2 et D_3. Considérons ici le cas d'un champ trivial ([1]) de dimension 1, repéré par une variable réelle invariante q, au voisinage de la solution $q = 0$.

F_1. *Si l'on suppose nuls les trois champs* D_2 (*on peut alors supposer les* $g^{\alpha\beta}$ *constants et les* $g^{5\alpha}$ *nuls*), *on obtient les équations d'onde*

$$\Box\,\psi_n + [a - n^2 g^{55}]\,\psi_n = 0 \qquad (a = \text{Cte})$$

qui sont les équations de Gordon d'une famille de particules, ayant le spectre de masse

$$m_n = \mu\sqrt{n^2 + k},$$

avec

$$\mu = \frac{h}{2\pi c^2}\sqrt{|g^{55}|}, \qquad k = \frac{a}{|g^{55}|},$$

h et c étant les constantes de Planck et de Maxwell.

La moyenne de la *charge*, prise sur les tores $x^\alpha = \text{Cte}$ (qui tiennent lieu d'instants-points quadridimensionnels), s'exprime par des formes hermitiennes des fonctions d'onde et de leurs dérivées premières : on reconnaît des circonstances habituelles en Mécanique Quantique. Ainsi la contribution au vecteur courant de l'onde $\psi_n (n = 1, 2, 3 \ldots)$ est, à un facteur fixe près,

$$J_k = \mathcal{R}(in\overline{\psi}_n \partial_k \psi_n).$$

F_2. *En s'affranchissant des hypothèses faites en* F_1 *sur les* g^{jk}, *on obtient des équations d'ondes valables en présence des trois champs gravifique, électromagnétique et nucléaire.*

F_3. *On peut également tenir compte du champ de connexions, après sa quantification au voisinage de la solution nulle : on obtiendra alors des termes d'interaction du second ordre.*

(1) Les sens des mots *variété*, *champ*, *champ trivial*, *glissement*, ainsi que les hypothèses de différentiabilité, sont précisés dans (4).

(2) J. M. Souriau, *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 2779.

(3) J. M. Souriau, *Comptes rendus*, 245, 1957, p. 958.

(4) J. M. Souriau, *La Relativité variationnelle*, publ. n° 1, Labor. Math. Institut des Hautes Études de Tunis, 1958 (ronéotypé).

RELATIVITÉ. — *La géométrie « semi-métrique », et la théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger.* Note (*) de M. **Pierre-V. Grosjean**, transmise par M. Georges Darmois.

Les équations de champ de la théorie unitaire généralisent le théorème de Ricci (4). Cette généralisation se trouve à la base d'une géométrie nouvelle, appelée ici « semi-métrique », où les produits internes ne sont plus permis qu'entre des vecteurs appartenant à des univers distincts, images l'un de l'autre. Ces univers forment par leur ensemble une même variété différentiable, dotée de connexions-images.

1. Soit V_n une variété différentiable; dotons-là de trois connexions $\underset{+}{\omega}$, $\underset{-}{\omega}$ et $\underset{0}{\omega}$, de coefficients respectifs $\Gamma^{\overset{+}{\gamma}}_{\underset{+}{\alpha}\beta}$, $\Gamma^{\overset{-}{\gamma}}_{\underset{-}{\alpha}\beta}$ et $\Gamma^{\overset{0}{\gamma}}_{\underset{0}{\alpha}\beta}$, définissant les mêmes géodésiques. Les connexions $\underset{+}{\omega}$ et $\underset{-}{\omega}$ seront dites « images » l'une de l'autre en ce sens qu'il existe un opérateur $\mathbf{P}$ de « passage aux images », tel que $\mathbf{P}\underset{\pm}{\omega} = \underset{\mp}{\omega}$ avec $\mathbf{P}^2 = 1$; $\underset{0}{\omega}$ est par contre « auto-image », c'est-à-dire que $\mathbf{P}\underset{0}{\omega} = \underset{0}{\omega}$. I. Cattaneo (1) et Fr. Tison (2) ont donné, à la suite d'Einstein (3), des exemples de pareils couples de connexions-images.

2. Désignons par (χ) l'*indice-signe* $(+)$, $(-)$ ou (0), et considérons trois référentiels dont les vecteurs de base obéissent aux relations d'image $\mathbf{P}\vec{e}_{\underset{\pm}{\alpha}} = \vec{e}_{\underset{\pm}{\alpha}}$